



TITLE:

Full H_1 Factorについて (C^* 環とK理論)

AUTHOR(S):

長田, まりゑ

CITATION:

長田, まりゑ. Full H_1 Factorについて(C^* 環とK理論). 数理解析
研究所講究録 1983, 488: 89-104

ISSUE DATE:

1983-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103488>

RIGHT:

Full II_1 Factor について

大阪教育大 長田まり子 (Marrie Choda)

Murray - von Neumann [21] は, II_1 型因子 に対して, 性質 (F) を定義することにより, II_1 型因子の中には, (F) をもつもの (超有限 II_1 型因子) と, (F) をもたないもの (二つの生成元をもつ自由群の群 von Neumann 環) が存在することと示した。 II_1 型因子が「(F) をもたない」という否定的条件は, その後 Connes [12] が因子に対して定義した「完全 (full)」と呼ばれる性質と一致する。

ここでは, 構成された von Neumann 環が完全 II_1 型因子になるためには, どのような条件が満たされればよいかという事を主題として, 完全 II_1 型因子は少なくとも三つ以上は存在する事など, いくつかの完全 II_1 型因子に関する事を記していく。

1. 定義と記号

von Neumann 環 A の $(*)$ -自己同型写像全体の群を, $\text{Aut}(A)$ で, 内部自己同型写像全体の群を $\text{Int}(A)$ で示

し, $\text{Out}(A) = \text{Aut}(A)/\text{Int}(A)$ とする。 A が忠実正規トレース τ をもつ有限型環のとき, その τ を固定して, A はヒルベルト空間 $L^2(A, \tau)$ 上で標準的に作用しているものとみなし, A の元 x の $L^2(A, \tau)$ への作用を x とを同一視して同じ x で記すことにする。

N を II_1 型因子, τ を N の canonical なトレースとしたとき次の条件が充たれるならば, N は (T) をもつ という: 任意の $\varepsilon > 0$ と N の有限個の元の集合 $\{x_1, \dots, x_n\}$ に対して, N に属するユニタリ作用素 u が存在して, $\tau(u) = 0$ かつ全ての $1 \leq j \leq n$ に対して $\|u x_j - x_j u\|_2 < \varepsilon$ を充す。 Connes [12] と境 [24] の結果により, N が (T) をもたない為の必要十分条件は, $\text{Int}(N)$ が閉じていることである。ここで, $\text{Aut}(N)$ に対する位相は次で定義されたものである: $d_n \rightarrow d \iff \|d_n(x) - d(x)\|_2 \rightarrow 0$ ($x \in N, d_n, d \in \text{Aut}(N)$)。 $\text{Int}(N)$ が閉じているとき, N は 完全 II_1 型因子 であると呼ばれる ([12])。

G を可算 (離散) 群とし, G の群 von Neumann 環を $R(G)$ で表わす: $\lambda(g) \xi(h) = \xi(g^{-1}h)$ ($g, h \in G, \xi \in L^2(G)$) に対し $R(G)$ は $\lambda(G)$ が生成する von Neumann 環。 G の (A, τ) への作用 α をもって, G から $\text{Aut}(A)$ への準同型 d で $\tau(dg(x)) = \tau(x)$ ($g \in G, x \in A$) を充すものを表わす。環 A の群 G による作用 α に関与する接合積を $R(G, A, \alpha)$ で記すことにする。

2. 完全Ⅱ型因子と与える条件

完全Ⅱ型因子の例としては, Murray - von Neumann が与えた二つの生成元をもつ自由群 F_2 の群 von Neumann 環 $R(F_2)$ の他には, 次のようなものがある;

- (i) 超有限Ⅱ型因子 N の F_2 による或る作用 α に関する接合積 $R(F_2, N, \alpha)$ ([22], [25] 他),
- (ii) 完全Ⅱ型因子 N_1 と N_2 のテンソル積 $N_1 \otimes N_2$ ([13]),
- (iii) 完全Ⅱ型因子 N 上の $n \times n$ 行列環 ([4]),
- (iv) 完全Ⅱ型因子 N と有限群 G に対し, $\alpha_g (1 \neq g \in G)$ が外部自己同型となる作用 α に関する $R(G, N, \alpha)$ と不動点環 $N^\alpha = \{x \in N; \alpha_g(x) = x, g \in G\}$ ([4], [2]).

(iv) における群 G が無限群のときには, $R(G, N, \alpha)$ が完全になる場合と, ならない場合が生じてくる。特に, G が整数の群 \mathbb{Z} のときについて, その例を掲げると,

- (i) g_1 と g_2 を F_2 の生成元, μ を無理数とし, $\theta \in \text{Aut}(R(F_2))$ を $\theta(\lambda(g_i)) = e^{i\mu} \lambda(g_i) \quad (i=1, 2)$ で定義する。すると全ての $n (\neq 0)$ に対し, θ^n は $R(F_2)$ の外部自己同型であり, $R(\langle \theta \rangle, R(F_2))$ は (I) をもち, 従って完全ではない。

- (ii) $\{g_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ を自由群 F_∞ の生成元の集合とする。 $\theta \in \text{Aut}(R(F_\infty))$ を $\theta(\lambda(g_i)) = \lambda(g_{i+1})$ で定義すると, 全ての $n (\neq 0)$ に対し, θ^n は外部自己同型であり, $R(\langle \theta \rangle, R(F_\infty))$

は再び完全Ⅱ型因子である。

上の (i) における θ に対して θ^n は恒等写像に収束するが
 (ii) における θ に対しては, $\{\theta^n\}_{n=1,2,\dots}$ の集合は $\text{Out}(R(F_\infty))$
 の中で離散な集合になっている。この事実に関して, Jones-
 Phillips による次の結果がある ([18], [23]): 完全Ⅱ型因
 子 N に対し, $R(\mathbb{Z}, N, \alpha)$ が完全であるための必要十分条件は,
 $\alpha(\mathbb{Z})$ の $\text{Out}(N)$ における像が離散集合になっていることである。

上の例 (i) によって, $\text{Out}(R(F_2))$ は離散ではないが, $\text{Out}(N)$ が離散になっている因子の例が Connes によって与えられた。
 群 G の自明な表現が G の中で孤立点になっているとき, G は
性質 (T) をもつと呼ばれる ([20])。 G が ICC 群 (すなわち
 (1*) $g \in G$ に対し $C_g = \{xgx^{-1}; x \in G\}$ が無限集合となる群
) であることは, $R(G)$ がⅡ型因子であるための必要十分条件で
 あるが, G が ICC 群であって (T) をもたなければ, $\text{Int}(R(G))$
 は稠密集合になっている ([14]), 従って $R(G)$ は完全であり, $\text{Out}(R(G))$
 は離散である。 ICC 群であって, (T) をもつものの代表例と
 しては, $SL(3, \mathbb{Z})$ があるが, 上記のことにより, $R(F_2)$ と
 $R(SL(3, \mathbb{Z}))$ とは同型でない完全Ⅱ型因子である。

今までの例は, 本質的には全て群環として与えられる完全
 Ⅱ型因子が土台になっているが, von Neumann 環と与える
 手段として重要なものに, 群測度空間構成法と呼ばれるもの

がある。この方法で完全正型因子を作り為に必要な条件について、次の §3 と §4 で考えてみたい。

3. 作用の強エルゴード性

A を忠実正規有限 τ -トレース τ ともつ von Neumann 環として $\tau(\tau(1)) = 1$ と正規化しておく。可算群 G の (A, τ) への作用 α に対して、エルゴード性より更に強い性質を考える。作用 α がエルゴード的であるとは、 $\alpha^G = \mathbb{C}1$ となることである。これに対し α が次の条件を満たすとき、作用 α は 強エルゴード的 であると呼ぶ：すべての $g \in G$ に対して、 $\|\alpha_g(x_n) - x_n\|_2 \rightarrow 0$ を満たす A の中の (作用素ノルムに関して) 有界な数列 $\{x_n\}$ は、 $\|x_n - \tau(x_n)1\|_2 \rightarrow 0$ を満たす。この性質は Connes-Weiss [15] が確率測度空間への群の作用に対して定義した概念の拡張になっている。明らかに強エルゴード性からエルゴード性は導かれるが、逆は成り立たないことは次の様な結果からも明らかである。 A が aperiodic な自己同型 θ を生成する群は、強エルゴード的に下らない も、もっと一般に、群 G が amenable であれば、 A 又は α に対し割合に自然な条件を付け加えれば、 α は強エルゴード的に下らない ([11])。

この強エルゴード性より、もっと強いエルゴード性を考えることもできる。各 $g \in G$ に対し、自己同型 α_g は $L^2(A, \tau)$

上のユニタリに拡張することができる。この拡張されたユニタリを同じ記号 u_g で表わすことにする。作用 α が次の条件を満たすとき、 α は S -強エルゴード的であると呼ぶ： $L^2(A, \tau)$ の中のノルム1のベクトルの数列 $\{\xi_n\}$ が $\|\alpha_g(\xi_n) - \xi_n\|_2 \rightarrow 0$ を全ての $g \in G$ に対して満たすならば、 $\|\xi_n - \langle \xi_n, 1 \rangle 1\|_2 \rightarrow 0$ とななければならない。明らかに、 S -強エルゴード的な作用は強エルゴード的であるが、逆は一般には成り立たない ([9], [25])。このような作用と余り無理とせおにちえることが可能な存在については、次のような結果が成立つ。

群 G が (T) をもつならば、全てのエルゴード的な作用は、 S -強エルゴード的である ([5])。又群 G が amenable となれば、 G の群 K への free な作用 α は、 $R(K)$ 上で S -強エルゴード的になる ([14])。

エルゴード性と S -強エルゴード性との違いは、次のような関係で言い表わすことができる。

エルゴード的な作用 α に対して、次の三つの条件は同値である ([6], [8])；

- $$\left\{ \begin{array}{l} (1) \alpha \text{ が } S\text{-強エルゴード的である,} \\ (2) A \text{ 上の } \alpha\text{-不変な状態は, 正規である,} \\ (3) \alpha_G \text{ の生成する } L^2(A, \tau) \text{ 上の } C^*\text{-環 } C^*(\alpha_G) \text{ が } 1 \in L^2(A, \tau) \text{ への一次元作用素 } P_1 \text{ を含む。} \end{array} \right.$$

系として、作用 α が s -強エルゴード的であるための必要十分条件は、 A 上の α -不変な状態が \mathbb{C} に限ることであるを得る。

更に、 α が s -強エルゴード的であれば、 α_G と A によって生成される $L^2(A, \mathbb{C})$ 上の C^* -環 $C^*(A, \alpha_G)$ は $L^2(A, \mathbb{C})$ 上の完全連続作用素全体を含む、 $C^*(A, \alpha_G)$ の P_1, P_2 を含むならば、 α は強エルゴード的である という関係が成立する ([8丁])。

4. 群測度空間構成法が完全 Π 型因子となる条件

ここでは、群測度空間構成法による von Neumann 環が完全 Π 型因子になるための条件を求めることに主眼として、一般の von Neumann 環からの接合積が完全 Π 型因子になるには、どのような条件が必要であるかについて、考えていく。

群 G の中心と $Z(G)$ で、集合 S の特性関数を χ_S で表わす。

群 G に対し、次の二つの条件は同値である ([10丁]) ;

$$\left\{ \begin{array}{l} (4) \quad \sum_{h \in G} |\xi_n(h) - \xi_n(g^{-1}hg)|^2 \rightarrow 0 \text{ を全ての } g \in G \text{ に対して充} \\ \text{す } l^2(G) \text{ の元の列 } \{\xi_n\} \text{ は, } \sum_{h \in Z(G)} |\xi_n(h)|^2 \rightarrow 0 \text{ を充す,} \\ (5) \quad l^2(G) \text{ 上の状態 } m \text{ に対し, 全ての } g \in G \text{ と } x \in l^2(G) \text{ に対して} \\ m(x) = m(gxg^{-1}) \text{ を充すならば, } m(\chi_{Z(G)}) = 1 \text{ となる,} \end{array} \right.$$

ただし、 $gxg^{-1}(h) = x(g^{-1}hg)$ ($g, h \in G, x \in l^2(G)$) とおく。

(例1) この同値条件を充す群の例として、次のようなものがある ; 自由群 F_n ($n=2, \dots, \infty$), $SL(n, \mathbb{Z})$ ($n=2, 3, \dots$),

$PSL(n, \mathbb{Z})$, 自由積 $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$ ($n \geq 2, m \geq 3$), それに可換群等。

同値条件 (4) 及び (5) を示すとき, 群 G は 性質 (F) をもつと呼ぶ。 G が (F) をもつということは, Effros [16] の定義した inner amenability と大きな関係があり, 中心が単位元のみの群の場合には, (F) をもつことと inner amenable であることが同値になる。一般の群の場合には, inner amenable であるならば (F) をもつが, $SL(2, \mathbb{Z})$ の例から判るように, (F) をもつ群が必ずしも inner amenable であるとは限らない。又 Kazhdan の性質 (T) については, G が (T) をもち, 任意の $g \in Z(G)$ に対して, C_g が無限集合になるならば, G は (F) をもつ。

さて, A を忠実正規有限なトレース τ をもつ von Neumann 環, G を可算群, α を G の (A, τ) への作用とす。そのとき G が (F) をもち, $Z(G)$ が有限集合で, 作用 α が強エルゴード的ならば, 接合積 $R(G, A, \alpha)$ は完全 II 型因子となる ([10])。この結果において, もし A が完全 II 型因子等の場合には, α の強エルゴード性は不要であるが, 一般に次が成立す。

A が可換な環のときには, α が強エルゴード的であれば $R(G, A, \alpha)$ は完全型因子にはならない ([7])。

又 $Z(G)$ の有限性も一般には省くことができないということとは (1) の例からも判るが (1) で扱った群は \mathbb{Z} だから, §3

で述べたように、その作用は強エルゴード的にならない。そこで次に $Z(G)$ が無限で、他の条件が全て充たされていて、 $R(G, A, \alpha)$ が完全にならない可換な A の例を掲げよう。

(例) μ をトーラス T 上のハール測度、 X を $SL(3, \mathbb{Z})$ 上の T の値を取る関数の全体 $X = T^{SL(3, \mathbb{Z})}$ とし、 ν を $SL(3, \mathbb{Z})$ と添字集合とす。 μ の無限積測度 $\nu = \mu^{SL(3, \mathbb{Z})}$ とす。 \mathbb{Z} と $SL(3, \mathbb{Z})$ の直積群 G の (X, ν) への作用 α を次の様に定義する；無理数 θ に対して、 $(\alpha(n, g) x)(h) = e^{in\theta} x(g^{-1}h)$ ($n \in \mathbb{Z}$, $g, h \in SL(3, \mathbb{Z})$, $x \in X$)。すると G は (F) をもち、 α の作用は強エルゴード的だが、 $Z(G) = \mathbb{Z}$ で無限集合となる。又 $R(G, L^\infty(X, \nu), \alpha)$ は完全でない II 型因子である。

5. 部分環に対する近似的正規性の応用

von Neumann 環の理論の中で最も重要な定理の一つは、いわゆる double commutant 定理； $A'' = A$ である。さらにまた von Neumann 環 M の von Neumann 部分環 B に対して、 $B^{cc} = B$ が成り立つとき、Kadison [19] は、 B は M の中で正規であると呼んだ。ただし $B^c = \{x \in M; xb = bx \text{ } b \in B\}$ 。エルゴード性に対して、強エルゴード性を導入したように、部分環に対する正規性に対して、次のような近似的正規性を考えることができる。

II型因子 N の自己共役な部分集合 S に対し, 集合 S^+ と次で定義する; $N \ni x$ に対し

$$x \in S^+ \iff \|x\gamma_n - \gamma_n x\|_2 \rightarrow 0 \quad \forall \text{ 全ての有界数列 } \{\gamma_n\} \subset N$$

$$\text{で } \|S\gamma_n - \gamma_n S\|_2 \rightarrow 0 \quad (S \in S) \text{ を充すものに対し}$$

て成立する。

S^+ は N の von Neumann 部分環となる。又一般に $S \subset S^+$ である。II型因子 N の von Neumann 部分環 B が $B^+ = B$ を充すとき, B は N の 中での近似的正規であるという。明らかに, 正規な部分環は近似的正規である。Connes [13] は, 超有限型 II型因子 R の von Neumann 部分環は全て R の中で近似的正規であることを示したが, 彼の証明は本質的には, 次の事柄を示している。(可分ヒルベルト空間上で作用している) II型因子 N の injective な von Neumann 部分環は, N の中で近似的に正規である ([10])。

では, 与えられたII型因子の中で, どのような部分環が, 近似的に正規ではなくなるのだろうか?

§4の結果の一つの応用として, 近似的正規でない部分環の例を得ることができ。

次に掲げる von Neumann 環 B はII型因子 N の中で近似的に正規でない ([10]);

(1) G を有限群, α を G の完全II型因子 B への作用で,

$d_g (g \neq 1)$ が B の外部自己同型に存在するものとしたとき

$N = R(G, B, \alpha)$ とおく。

(i) A を忠実正規有限なトレース τ をもつ von Neumann 環

G を (H) をもつ群で, $Z(G) = \{1\}$ を充すとし, α は

G の (A, τ) の作用とする。 \mathcal{U} を接合種を構成する

ときの G から $R(G, A, \alpha)$ の中への \mathcal{U} の \mathcal{U} 表現とし,

$N = R(G, A, \alpha)$, $B = \{\mathcal{U}(G) \text{ の生成する von Neumann 環}\}$ とする。

更に一般に, 群 G が (H) をもち $Z(G) = \{1\}$ を充すならば

G から完全 II_1 型因子 N への \mathcal{U} の \mathcal{U} 表現 \mathcal{U} が存在して, $\mathcal{U}(G)$

の生成する von Neumann 環 B が N の中で近似的に正規でない

ようにする事ができる ([10]) 。

6. Haagerup 型の II_1 型因子

N を II_1 型因子, τ を N 上の canonical トレースとする。 N 上

の正規線型写像の族 $\{P_t\}$ で, 次の条件 ① ~ ③ を充すものが,

存在するとき, N は Haagerup 型 であるという;

① 各 P_t は完全正值で, $P_t(1) = 1$ である,

② 各 P_t はコンパクト (即ち任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 有限次元写像 Q_t が存在して $\|P_t(x) - Q_t(x)\|_2 < \varepsilon \|x\|_2$ ($x \in N$)),

③ 全ての $x \in N$ に対して, $\|P_t(x) - x\|_2 \rightarrow 0$ である。

超有限 II_1 型因子 N は, I_{2^n} 型因子の増加列 $\{M_n\}$ から生成さ

れているので、 P_n として R から M_n への期待値を取れば、列
 $\{P_t\}$ は①～③を満たしている。

Comnes は 1980 年の夏にキングストンで催された研究集会
 で、"Haagerup case" という名のもとで上記のような条件を
 満たすⅡ型因子について触れ、"Haagerup case" Ⅱ型因子の部
 分因子は全て "Haagerup case" (なぜならば、部分因子への
 条件付期待値と P_t との合成を考之ればよい) であると述べ
 た。しかし発行された講演集録の中では、"Haagerup case"
 については何も記していない。ここでは Comnes の "Haagerup
 case" にちなんで、しかしその定義が同一か否か明確ではな
 いので、Haagerup 型と呼ぶことにする。Haagerup 型の完全Ⅱ
 型因子の類は、完全Ⅱ型因子の集合の中で極小な類である。
 Ⅱ型因子の代表例は一般に ICC 群 G に対する環 $R(G)$ として
 与えられる。ここでは、 $R(G)$ が Haagerup 型になるための
 ICC 群 G の必要十分条件を求める。

群 G に対して、次の条件 ①'～③' を満たす関数の族 $\{q_t\}$ が存
 在するとき、 G は 性質 (H) ともつという；

- ①' 各 q_t は正の定符号関数で、 $q_t(1) = 1$ である、
- ②' 各 q_t は無限遠点で 0 になる (即ち、任意の $\varepsilon > 0$ に対し
 G の有限部分集合 G_0 が存在して $|q_t(g)| < \varepsilon$ ($g \notin G_0$)),
- ③' 全ての $g \in G$ に対して、 $q_t(g) \rightarrow 1$ である。

amenable な群は明らかに性質 (H) をもつ。又自由群 F_2 の元 g に対して, $\varphi_t(g) = e^{t|g|}$ ($|g|$ は既約語 g の長さ) とおけば, Haagerup [17] の結果により, $\{\varphi_t\}$ は条件を充す。所が, G が Kazhdan の性質 (T) をもてば, Abemmann - Walter [1] の結果により, G は性質 (H) をもたない。

ICC 群 G に対して, $\tau(x) = \langle x\delta_1, \delta_1 \rangle$ ($x \in R(G)$) で定義されたトレース τ をとる。 G が性質 (H) をもつとき, 各 t と各 $g \in G$ に対し, $P_t(\lambda(g)) = \varphi_t(g)\lambda(g)$ とする写像 P_t は, $R(G)$ 全体に拡張することができる。そのとき族 $\{P_t\}$ の充た性質 ① ~ ③' に対応して, 族 $\{P_t\}$ は性質 ① ~ ③ を充す。逆に $R(G)$ が Haagerup 型なとき, 各 t と各 $g \in G$ に対して,

$\varphi_t(g) = \tau(P_t(\lambda(g))\lambda(g^{-1}))$ とおけば, 族 $\{P_t\}$ の性質 ① ② ③' に対応して, 族 $\{\varphi_t\}$ の性質 ① ② ③' が導き出される。この事により, ICC 群 G に対して, $R(G)$ が Haagerup 型である為の必要十分条件は, G が性質 (H) をもつことであることが判る ([3])。従って, G が性質 (T) をもつ ICC 群ならば

$R(G)$ は Haagerup 型でない完全 II₁ 型因子である。 $R(F_2)$ と $R(SL(3, \mathbb{Z}))$ のテンソル積 $R(F_2) \otimes R(SL(3, \mathbb{Z}))$ は, $R(SL(3, \mathbb{Z}))$ を部分環として含むから Haagerup 型ではなく (i) における $R(F_2)$ の自己同型 θ に対して, $\{\theta^n \otimes 1\}_n$ の部分列で恒等写像に収束する外部自己同型の列が取れること

により, $\text{Iwt}(R(F_2) \otimes R(SL(3, \mathbb{Z})))$ は開集合でない。従って,
 $\{R(F_2), R(SL(3, \mathbb{Z})), R(F_2) \otimes R(SL(3, \mathbb{Z}))\}$ は互いに同型
 でない完全 II 型因子の組となる ([3])。

最後に II 型因子に対する Haagerup 型という性質が, von Neumann 環の操作に対してどの程度保たれるかについて, 記しておく。Haagerup 型因子同志のテンソル積, 及び, Haagerup 型因子上の $n \times n$ -行列環は明らかに Haagerup 型であるが, Haagerup 型因子の群による接合積は, もし G が, amenable であれば, Haagerup 型になることを示すことができる。

文 献

- [1] C.A.Akemann and M.E.Walter, Unbounded negative definite functions, Can. J. Math., 33(1981), 862-872.
- [2] H. Choda and M. Choda, Fullness, simplicity and inner amenability, Math. Japonica, 24(1979), 235-246.
- [3] M. Choda, Group factors of the Haagerup type, Preprint.
- [4] _____, The crossed product of a full II_1 -factor by a group of outer automorphisms, Math. Japonica, 23(1978), 385-391.
- [5] M. Choda and Y. Watatani, Fixed point algebra and property T, Math. Japonica, 27(1982), 263-266.
- [6] M. Choda, Normality of invariant states under strongly ergodic actions, Math. Japonica, 27(1982), 293-300.

- [7] M. Choda, Property T and fullness of the group measure space construction, Math. Japonica, 27(1982), 535-539.
- [8] _____, Strong ergodicity and compact operators, Math. Japonica, 27 (1982), 639-643.
- [9] _____, Effect of inner amenability on strong ergodicity, Math. Japonica, 28(1983), 109-115.
- [10] _____, A condition to construct a full II_1 -factor with an application to approximate normality, to appear in Math. Japonica.
- [11] _____, Amenability and strong ergodicity, in preparation.
- [12] A. Connes, Almost periodic states and factors of type III_1 , J. Fnal. Analysis, 16(1974), 415-445.
- [13] _____, Classification of injective factors, Ann. Math., 104(1976), 73-116.
- [14] _____, A factor of type II_1 with countable fundamental groups, J. Operator Theory, 4(1980), 151-153.
- [15] A. Connes and B. Weiss, Property T and asymptotically invariant sequences, Israel J. Math., 37(1980), 209-210.
- [16] E.G.Effros, Property and inner amenability, Proc. Amer. Math. Soc., 47(1975), 483-486.
- [17] U. Haagerup, An example of a non-nuclear C^* -algebra, which has the metric approximation property, Invent. Math., 50(1978-1979), 279-293.
- [18] V. F. R. Jones, Central sequences in crossed products of full factors, Duke Math.J., 49(1982), 29-33.
- [19] R.V.Kadison, Normalicy in operator algebra, Duke Math. J., 29(1962), 459-464.
- [20] D.A.Kazhdan, Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups, Functional Anal. Appl., 1(1967), 63-65.

- [21] F.J.Murray and J.von Neumann, Rings of operators IV, Ann. of Math., 44(1943), 716-804.
- [22] M.Nakamura and Z.Takeda, On certain examples of the crossed product of finite factors, I, Proc. Japan Acad., 34(1958), 495-499.
- [23] J.Phillips, Automorphisms of full II_1 factors with applications to factors of type III, Duke Math.J., 43(1976), 375-385.
- [24] S.Sakai, On automorphism groups of II_1 -factors, Tohoku Math.J., 26(1974), 423-430.
- [25] K.Schmidt, Amenability, Kazhdan's property T, strong ergodicity and invariant means for ergodic group actions, Ergod. Th. and Dynam. Sys., 1(1981), 223-236.
- [26] N. Suzuki, Certain types of groups of automorphisms of a factor, Tohoku Math. J., 11(1959), 314-320.